平成26年度
第50回

「わたしの教育記録」入選作品発表！

不完全な問題を用いた学びの必然性のある授業

山口県熊毛郡平生町立平生中学校教諭　数学科

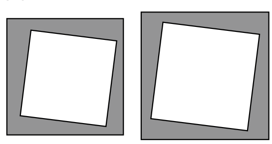
山元　光一

《キーワード》わからない、学びの必然性、不完全な問題、関数関係を見いだす

はじめに

　ある日の授業で、左の図のような2つの正方形を重ねた図形を見せて、どちらの黒い部分が大きいと思うか質問した。すると子どもたちは最初こそ、「わからん、わからん」と言ってはいたもののその後、思い思いに「右だ」、「左だ」、「いや同じだ」とわいわい話し出した。いつもならば最初から辺の長さを示して大きさを求めさせるところであるが、このときはちょっとした思いつきからあえて長さを示さずに図だけを提示してみた。もしかすると、こんなのわからないと、はじめからやる気を出さない生徒が多く出てしまうかもしれないという不安もあったが、ものは試しでやってみたのである。結果論かもしれないが、私の不安などよそに、子どもたちはこの課題を楽しんでいた。

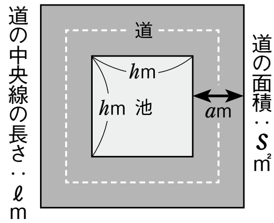
図1



　子どもたちの思い思いの言葉の中に「右の方が外側の正方形の辺の長さは大きいよね」とか、「中の正方形の辺の長さはどっちが長いんだろう」といった、この図形から課題を解決するために必要な要素に関するつぶやきが出てきていることに気づいた。つまり、子どもたちは単純に目の前にある図形の見た目から面積の大きさを判断するのではなく、数学的に解決する方法を選択していたのである。一通り意見が出たところで、各辺の長さを与えると、子どもたちは外の正方形の面積から中の面積を引いて大きさを比べていた。

　後日、教科書にある証明問題を行ったとき、中央線の長さをaとhをつかって表せたにもかかわらず、道路の面積Sの表し方がわからない子どもが多くいた。そこで、前出の図1を示すとすぐに外の正方形の面積から内側の正方形の面積を引けばよいことに気がついた。

図2　$S＝a\ell$となる証明問題



　こちらの問題は問題を解くために必要な情報はすべて示されているし、2つの正方形が対角線の交点を相似の中心となるよう

な位置に並んでおり、面積を求めやすい並びになっているように思えるのであるが、子どもたちは（実数値か文字か言葉であるにせよ）こちらの図から面積を求めることに困難さを感じていたのである。

このことから問題に不完全な要素があることが、子どもを学びに向かわせる何かがあるのではないかと思ったのが本研究のきっかけである。

（１「研究の内容と方法」の項は略す）

２「不完全な問題」とその授業

２-１　不完全な問題を行うことによる効果について

先行研究（２-１-１）と、「図形」領域における授業の学習展開（２-１-２／次ページ参照）をヒントにして、この研究における「不完全な問題」の要素を考える。

２-１-１　先行研究の検討から仮説の設定

松原元一氏は著作『考えさせる授業』（１９８７）において、子どもは、課題を自分の知識をつかって作り変えるところから思考を始め、そこから課題の細部について観察し、自分なりに構造化することで課題を明確にし、そのことが課題解決の意欲を増すことになることを示している。

したがって、不完全な問題を用いれば、子どもが自分のもっている知識をつかって創作する部分を多くし、自分の問題が明確になり、問題に興味や意欲をもって取り組めるようになるのではないだろうか。

次の項では実際の授業を通して、生徒が課題に意欲的に取り組むために必要な「不完全な問題」の要素について考える。

２-１-２　「図形」領域の授業「三平方の定理」における授業から

「三平方の定理を利用して辺の長さを求める」授業をアレンジして行った。

導入部分では数値の示されない二等辺三角形を見て「これ（図）だけでは求められない」と訴える生徒がおり、そこで、「どんな情報がほしいか」と投げかけた。生徒の多くは、二等辺三角形の３辺の長さを教えてほしいと言ってきたが、中には、ＢＣとＡＥの長さを求める生徒やＡＣとＢＤの長さを求める生徒もいた（①②）。最終的に二等辺三角形の３辺の長さを教え、その他の長さは各自で求めるように指示した。

これらの情報からどうやって面積を求めるか考えさせたところ、三角形の面積の公式を用いようとする生徒もいたが、２つの三角形の長辺同士を合わせてひし形を作って対角線の長さをつかい、面積を求める方法や短辺同士を合わせて平行四辺形を作って面積を求める方法が示された（③）。

全体でこれらの方針を確認したあと、小集団で実際に面積を求める作業に移った。作業中、長さのわからない辺をどうやって求めたらよいかわからない生徒に対して、同じ集団の生徒が二等辺三角形の内部や外部に補助線を引くことで直角三角形を作ることができることを示し、三平方の定理を用いれば辺の長さが求められることを確認する場面が多くの班で見られた（④）。

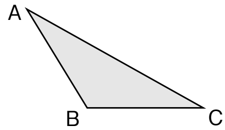
授業後の感想では、「補助線の引き方によって面積の求め方が変わる」ことに注目したものや、「直角三角形を見いだすことで三平方の定理がつかえる」ことに注目したもの（数学的な見方や考え方）、「三平方の定理が面積を求めるときにもつかえる」ことに三平方の定理の良さを見いだしたもの（関心・意欲）、「最初は情報が少なすぎて求められないと思っていたが、自分でこ

この長さがわかったらいいのにと思ったことが、後で面積を求めることに役立っていて、やっていておもしろかった」（関心・意欲）などが挙がった。

このように、不完全な問題を提示することで問題解決に必要な情報は何かが鮮明になることや、自らが求めた長さや自らが考えた探究への道筋をつかっての学習が、生徒の学習意欲を高め、生徒の「学び」を推し進めていることがわかる。

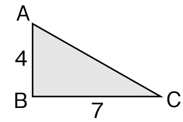
アレンジ後

右の図のような二等辺三角形の面積を求めなさい。

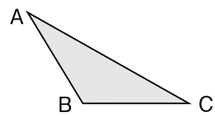
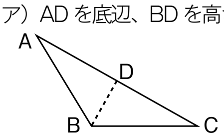
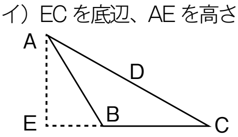


アレンジ前

AB=4、BC=7のとき AC の長さを求めなさい。



授業の過程

学習内容及び学習活動	予想される生徒の反応	教師の手立て
①面積を求めるためにどうするか考える。	•図だけでは求めることができないと考える。	•図を提示し、今日は何を考えるかを予想させる。 •このままでは求められないのはなぜか問い、その答えを受けて②につなげる。
右の図のような二等辺三角形の面積を求めよう。 		
②面積を求めるために、ほしい情報は何か？	•解決の見通しをもった意見が出るかもしれない。	• AB=BC=5、AC= 8を伝える。 •上記以外の長さは、既習の内容を利用して求めるように指示し③につなげる。
ア）三角形の全ての辺の長さ イ）AB と BC の長さ ウ）BC と点 A から辺 BC の延長線と垂直に交わるまでの長さ エ）AC と点 B から辺 AC に垂直に交わるまでの長さ		
③面積を求める方針を考える。	•②の考えをいかして方針を立てるだろう。	•どのように面積を出せばよいかわからない生徒には、三角形の面積の公式に合わせて、底辺と高さをどこにするか考えさせる。
ア）AD を底辺、BD を高さ  イ）EC を底辺、AE を高さ 		
④面積を求める。		•イ）の方法で面積を求めようとすると計算が複雑になるため、難しい場合は、ア）の方法でやってみた後、挑戦するように促す。
ア）AD＝4 BD＝$\sqrt{5^2-4^2}$ ＝3 △ABC＝8×3÷2 ＝12 イ）AE＝x、EB＝yとすると $x^2+y^2=5^2$ $x^2+(y+5)^2=82$ より$x=\frac{24}{5}$、$y=\frac{7}{5}$ △ABC＝12		
⑤本時を振り返る。		

２・１・１と２・１・２から、「不完全な問題」は、このままではわからないという困り感からスタートする。そこで、なんでわからないのかを考えることになる。一般的な問題では問題解決に必要な条件が全て提示されているにもかかわらず、数学が苦手な子どもたちの中には何がわからないのかわからない状態になり解決をあきらめたり、やる気を失ったりすることになる。「不完全な問題」は問題解決できない理由は簡単である。

解決するための条件がそもそも足りないのである。つまり、数学が苦手な生徒にとっても自分の数学的な能力の低さや知識のなさから「わからない」という、自分に起因するわからなさではないのであるから、本人が劣等感を抱いて問題に出合うことを回避できる。さらに直感に頼った解決の方針が後から実際に問題を解決する際に役に立つ可能性を残している。こういった要素が一人ひとりの問題解決への意欲をもたせるとともに、学習集団の相互作用による問題解決への道筋を与えると考える。

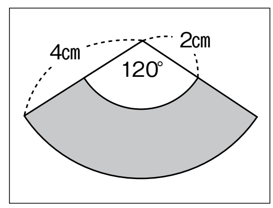
そこで、「不完全な問題」を扱うのに以下の2つに重点をおいて研究を進めた。

（ア）導入部分における、生徒が抱いた「わからないこと」を「わかるために知りたいこと」ととらえ、思考の起点にする。

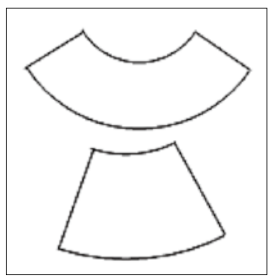
（イ）展開部では、導入部の「わかるために知りたいこと」と関連付けて見通しを立てさせる。

2-2 授業に向けて

下段の教材例のように教材をアレンジして授業を行った。ここでは、その際の教材のとらえ方にふれる。



アレンジ前
上の図は半径4㎝中心角120°の扇形に同じ中心角をもつ半径2㎝の扇形を重ねたものである。灰色で塗られた部分の面積を求めなさい。



アレンジ後
上図のように同じ中心角の扇形を重ねた図形がある。どちらの面積が大きいか調べたい。どこが知りたい？（上下の弧と幅を与える）

2-2-1 教材選択の意図

①教材名　「バームクーヘンの面積を求めよう」

②主　眼　相似な扇形の中心角を重ねて作った図形について、重なっていない部分の面積を求める活動を通して、多様な視点で問題を解決することの有用性を感じ取ることができる。

2-2-2 授業の実際

（山口大学教育学部附属光中学校 3年2組2014年3月5日）

下の図3のような2つの図形を見せ、「どちらの図形の面積が大きいと思うか」と、投げかけた。生徒の意見はだいたい半々に分かれたが、「見た目だけでは判断できない」という意見が多く出た。そこで、生徒に元の図を縮小した図をプリントして配り、「これなら、どっちが大きいかわかるかな」と問うた。子どもたちは、長さを測ったり、2つの図形を重ねたりしながら2つの図形の大きさを比べてみたがしっくりこないようだった。

図3

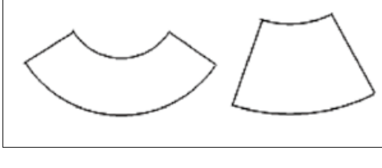
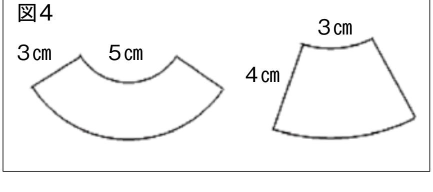


図4

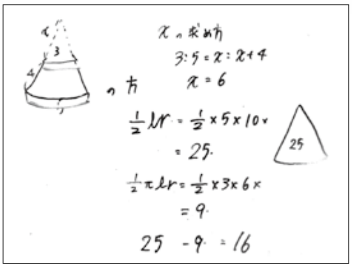


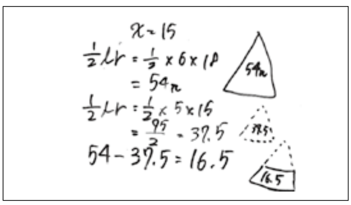
次に、Ⓐ扇形の半径がわかれば求められそうという子が何人か現れた。また、Ⓑ扇形の中心角やⒸ図の弧や幅などを教えてほしいという生徒が多かったが、あえて前ページの図4のように長さを教えた。

■Ⓐについて知りたかったことから、半径についての補助線を引くことで2つの相似な扇形をつくり、相似の性質を利用して辺の長さを求める。

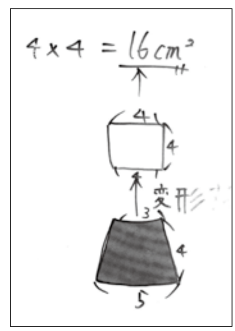
■Ⓑの知りたいことをもとに $2\times\pi\times15\times\frac{x}{360}=5$ から中心角を求める。

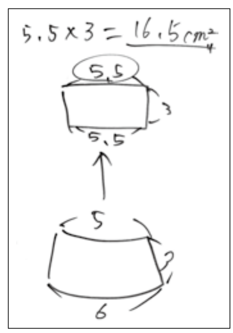
■Ⓒで知りたかったことをもとに、$\frac{1}{2}\ell r$ を利用した考え方



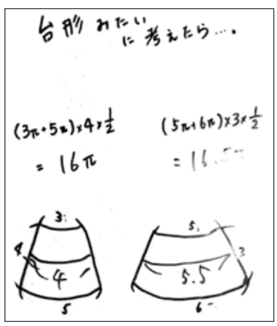


■ⒶⒷⒸの知りたいことと自分の経験を統合し、図を変形させる考え方（下図参照）

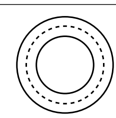




■台形の公式を利用した考え方



文字式の利用で考えた。中央線と幅の積が同心円間の面積になることと統合する。



3 不完全な問題の良さと課題

①子どもを自然と問題の状況の中におくことができる

また、授業の中で扱う問題であるから必要な条件を子ども同士の合意形成をもって、小出しに設定していくことも可能である。しかも、子どもの考えを聞きながら設定するため、子どもは自然と問題の状況の中におかれることになる。つまり、不完全な問題は、動的な授業で扱う問題として適しているといえる。

②数学的な視点を鋭くすることができる

本授業では、バームクーヘンの形として提示した。

この図形の数学的な意味付けは、子どもたちとの意見のやりとりの中で行った。実際の生徒とのやりとりを次に示す。

①S「先生、これって扇形になるよね」
②T「なんで扇形っていえるの?」
③S「だって、左右の幅のところの線を延ばしたら、扇形じゃん」
④T「その形は本当に扇形なの?」
⑤S「右と左の点線の長さが一緒になってるから扇形だろう」
⑥S「先生、コンパスで交点のところにコンパスの針をさしてコンパスを回したら、バームクーヘンの外側の線の上をなぞれたから扇形っていえるよ」

⑦T「ごめん、もどるけど扇形の定義ってなんだったっけ」
⑧S「円の一部やろ」
⑨T「じゃ、円の定義は?」
⑩S「中心からの距離が全部同じ点の集まり」
⑪S「じゃあ、バームクーヘンの線が交わった点から全部同じ長さになってたらいいってことか」
⑫T「何がいいの?」
⑬S「(交点からバームクーヘンの外側の線までの長さが)全部同じになってたら、バームクーヘンが扇形っていえるってこと」
⑭T「で、扇形っていえるの?」
⑮S「さっきコンパスでなぞれるって言ってたから、同じ長さになるってことやろ」

このやりとりの中で扇形とは何なのか、見た目だけでなく、定義や数学的な言葉、コンパスの特性をつかって示させることができた。これは、この図形が何であるかや線分の長さが示されていたのではできない。不完全な問題を用いることで、厳密にその図形を特定していくことを追体験している。この体験を積んでいくことで、数学的な視点を鋭くしていくと考える。

③図形の関数関係を見いだすことができる

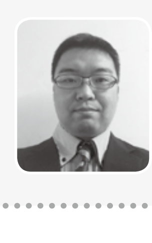
この問題では、面積と扇形の半径や中心角が従属変数と独立変数の関係になっている。図形にいろいろな数値が入っていると、数値に束縛されて関数関係を見いだすことができないことが多い。不完全な問題では、数値が示されていないため、半径の長さを延ばしたり、中心角の角度を変えたときに、面積が大きくなったり小さくなったりすることをイメージでき、自然と図形の関数関係に目を向けることができる。

今後の課題

不完全な問題として、条件不足の問題のみを考えたが、これとは逆に条件過多の問題を考えていなかった。条件不足の問題では学習者の意欲を引き出したり、図形の関数関係を見いだすことなどの成果があった。これに対して、条件過多の問題では、情報選択や情報操作を見抜くといった判断力を養うことができるのではないかと考える。今後は条件不足の問題の実践を重ねるとともに、条件過多の問題についての効果についても研究を進めていきたい。

受賞の言葉

山口県熊毛郡平生町立
平生中学校教諭
山元　光一



論文を読んでくださった先生方に感謝申し上げるとともに、入選に選んでいただきましたことを心より感謝申し上げます。

子どもたちが楽しそうに授業に参加している様子を見ると、うれしくなって、顔がほころんでくるのを感じます。現実は、そうならない授業の方が多いのですが、毎回の授業で少しでも子どもたちが意欲的に取り組めるように工夫を重ねているところです。そんなふうに試行錯誤を繰り返す中で生まれたのが今回の研究です。

この研究は、情報不足の課題を与えることで、課題に対して必要な情報は何なのかを自分で見つけ出すことができるようになり、意欲的に課題に取り組むことができるようになるのではないかという仮説のもとに行いました。

いくつかの授業を行っていくうちに、情報が少ないと子どもたちは、自分で関係のあるものどうしを結びつけるようになることがわかってきました。とくに、図形では相似な図形を見つけ出し、その対応を念頭において比例関係をつかって長さを見いだしていることがわかりました。

今回は条件不足の課題を考えましたが、次は条件過多の課題に挑戦してみようと思っています。日々の仕事に追われる毎日ではありますが、少しでも研究を進め、よりよい授業にしたいと思います。